О КОНТРПРИМЕРЕ ШАРИПОВА К ГИПОТЕЗЕ ХАБИБУЛЛИНА

Р. А. Баладай

Аннотация. Гипотеза Хабибуллина имеет три эквивалентные формулировки. Недавно Шариповым был построен контрпример к этой гипотезе в одной из трех формулировок. В данной работе этот контрпример переносится на случай двух других формулировок гипотезы Хабибуллина.

Ключевые слова: гипотеза Хабибуллина, контрпример Шарипова, интегральные неравенства, интегральные преобразования.

Keywords: Khabibullin's conjecture, Sharipov's counterexample, integral inequalities, integral transformations.

1. Введение.

Гипотеза Хабибуллина — это некоторое утверждение относительно интегральных неравенств. Первоначально она была сформулирована в работах [1] и [2] в классе неотрицательных неубывающих функций, выпуклых относительно логарифма. В работе [3] были даны две другие формулировки этой гипотезы, эквивалентные первоначальной. При этом условие выпуклости относительно логарифма было снято и гипотеза Хабибуллина была сначала переформулирована в классе неотрицательных неубывающих функций, а затем в классе неотрицательных непрерывных функций. Приведём все три формулировки гипотезы Хабибуллина. Первая из них — это исходная формулировка.

Гипотеза 1.1 (Хабибуллин)**.** *Пусть λ — положительное вещественное число и пусть n — целое число, такое, что $n \geqslant 2$. Пусть $S(x)$ — неотрицательная неубывающая функция на интервале на $[0,+\infty)$, выпуклая относительно логарифма. Тогда, если неравенство*

$$\int\limits_0^1 S(tx)\,(1-x^2)^{n-2}\,x\,dx \leqslant t^{\lambda}$$

выполняется для всех $0 \leqslant t < +\infty$, то из него вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} S(t)\,\frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2}\,dt \leqslant \frac{\pi\,(n-1)}{2\lambda}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\lambda}{2k}\Bigr).$$

Baladai R. A. On Sharipov's counterexample to Habibullin's conjecture.

Условие выпуклости функции $S(x)$ относительно логарифма в гипотезе 1.1 означает, что функция $\sigma(x) = S(e^x)$ является выпуклой функцией в обычном понимании, т. е. при при любых значениях x и y она удовлетворяет неравенству

$$\sigma(\alpha\, x + \beta\, y) \leqslant \alpha\, \sigma(x) + \beta\, \sigma(y), \ \text{ если } \ \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0 \ \text{ и } \ \alpha + \beta = 1.$$

Гипотеза 1.2 (Хабибуллин)**.** *Пусть α — положительное вещественное число и пусть n — целое число, такое, что $n \geqslant 1$. Пусть $h(x)$ — неотрицательная неубывающая функция на интервале $[0, +\infty)$. Тогда, если неравенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{h(tx)}{x}\,(1-x)^{n-1}\,dx \leqslant t^{\alpha} \tag{1.1}$$

выполняется для всех $0 \leqslant t < +\infty$, то из него вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{h(t)}{t}\,\frac{dt}{1+t^{2\alpha}} \leqslant \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr). \tag{1.2}$$

Гипотеза 1.3 (Хабибуллин)**.** *Пусть α — положительное вещественное число и пусть n — натуральное число, такое что $n \geqslant 1$. Пусть $q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на интервале $[0, +\infty)$. Тогда, если неравенство*

$$\int\limits_0^1 \left(\,\int\limits_x^1 (1-y)^{n-1}\,\frac{dy}{y}\right) q(tx)\,dx \leqslant t^{\alpha-1}$$

выполняется для всех $0 \leqslant t < +\infty$, то из него вытекает неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} q(t)\,\ln\Bigl(1+\frac{1}{t^{\,2\alpha}}\Bigr)\,dt \leqslant \pi\,\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1+\frac{\alpha}{k}\Bigr).$$

В работе [4] было доказано, что гипотеза 1.1 верна в случае $0 < \lambda \leqslant 1$. Для гипотез 1.2 и 1.3 это означает, что они верны при $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

В серии работ [5, 6, 7] отдельно исследовалась третья формулировка гипотезы Хабибуллина. При этом ещё раз было доказано, что гипотеза 1.3 верна при $0 < \alpha \leqslant 1/2$ для любых целых $n \geqslant 1$. Однако, как оказалось, за пределами интервала $0 < \alpha \leqslant 1/2$ гипотеза 1.3 не всегда верна. В работе [7] был построен контрпример к гипотезе 1.3 для случая $n = 2$ и $\alpha = 2$. Основная цель данной работы пересчитать построенный Шариповым в [7] контрпример на случай гипотез 1.2 и 1.1 соответственно.

2. Контрпример Шарипова.

Контрпример Шарипова к гипотезе 1.3, построенный в работе [7], — это функция $q(x)$, заданная на интервале $[0, +\infty)$ при помощи формулы

$$q(x) = \begin{cases} 12\,x\,(1-\varepsilon\, r(x)) & \text{при } \ 0 \leqslant x < x_0,\\ \qquad 12\,x & \text{при } \ x \geqslant x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

в которой $x_0 = \sqrt[4]{3/5}$, а $r(x)$ — некоторый конкретный полином четвёртой степени по x. Контрпример (2.1) содержит числовой параметр ε, который может быть любым фиксированным вещественным числом, удовлетворяющим

неравенству $0 < \varepsilon \leqslant 1$. То есть формула (2.1) даёт не один контрпример, а однопараметрическое семейство контрпримеров, зависящее от параметра ε.

Полином $r(x)$ в формуле (2.1) выражается через другой полином четвёртой степени $R(\tau)$ при помощи линейной замены переменной:

$$r(x) = R(\tau), \text{ где } \tau = \frac{x_0 - x}{x_0}. \tag{2.2}$$

А полином $R(\tau)$ в (2.2) уже определяется явной формулой:

$$R(\tau) = (21\,\tau^3 - 34\,\tau^2 + 16\,\tau - 2)\,\tau.$$

3. Контрпример к гипотезе 1.2.

Контрпример к гипотезе 1.2 должен быть неотрицательной неубывающей функцией $h(x)$ на интервале $[0, +\infty)$, удовлетворяющей неравенству (1.1), но не удовлетворяющей неравенству (1.2). При выводе гипотезы 1.3 из гипотезы 1.2 в работах [3] и [4] была использована формула

$$q(x) = \frac{dh(x)}{dx}. \tag{3.1}$$

Согласно формуле (3.1) для получения требуемой функции $h(x)$ надо проинтегрировать функцию (2.1). Это даёт

$$h(x) = \int\limits_0^x q(y)\,dy + C, \tag{3.2}$$

где C — константа интегрирования.

Выбор константы интегрирования C в формуле (3.2) определяется неравенством (1.1). В этом неравенстве следует положить $\alpha = 2$ и $n = 2$, поскольку контрпример Шарипова (2.1) относится именно к такому случаю. Тогда неравенством (1.1) запишется в следующем виде:

$$\int\limits_0^1 \frac{h(tx)}{x}\,(1 - x)\,dx \leqslant t^2. \tag{3.3}$$

Подставим $t = 0$ в неравенство (3.3). При этом аргумент функции $h(tx)$ занулится и её можно будет вынести за знак интегрирования:

$$h(0)\int\limits_0^1 \frac{1 - x}{x}\,dx \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Интеграл в формуле (3.4) положителен. По этой причине неравенство (3.4) даёт $h(0) \leqslant 0$. С другой стороны, $h(x)$ должна быть неотрицательной функцией на интервале $[0, +\infty)$. Отсюда $h(0) \geqslant 0$. Из двух противоположных неравенств $h(0) \leqslant 0$ и $h(0) \geqslant 0$ вытекает следующее равенство:

$$h(0) = 0. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) означает, что константа интегрирования C в формуле (3.2) должна выбираться равной нулю, что даёт

$$h(x) = \int\limits_0^x q(y)\,dy. \tag{3.6}$$

Теперь функция $h(x)$ вычисляется прямой подстановкой функции (2.1) в формулу (3.6). После вычисления интеграла это даёт

$$h(x)=\begin{cases}6\,x^2\,(1-\varepsilon\,u(x)) & \text{при}\ \ 0\leqslant x<x_0,\\ \qquad 6\,x^2 & \text{при}\ \ x\geqslant x_0.\end{cases}\tag{3.7}$$

Многочлен $u(x)$ в формуле (3.7) определяется равенством

$$u(x)=U(\tau),\ \ \text{где}\ \ \tau=\frac{x_0-x}{x_0}.\tag{3.8}$$

Через $U(\tau)$ в формуле (3.8) обозначен многочлен четвёртой степени по переменной τ, определяемый следующей явной формулой:

$$U(\tau)=(7\,\tau^2-8\,\tau+2)\,\tau^2.\tag{3.9}$$

Теорема 3.1. *Для каждого конкретного значения параметра ε, удовлетворяющего неравенствам $0<\varepsilon\leqslant 1$, функция $h(x)$, определяемая формулами* (3.7), (3.8) *и* (3.9), *является контрпримером к гипотезе Хабибуллина 1.2 для случая $n=2$ и $\alpha=2$.*

Доказательство теоремы 3.1 может быть получено прямыми вычислениями. Сама же функция (3.7) с многочленом $u(x)$ из (3.8) — это есть контрпример Шарипова, пересчитанный со случая гипотезы 1.3 на случай гипотезы 1.2.

4. Контрпример к гипотезе 1.1.

Для того, чтобы пересчитать контрпример (3.7) со случая гипотезы 1.2 на случай гипотезы 1.1, надо пройти путем, проложенным в работе [3], но в обратном направлении. Сначала определим функцию

$$s(x)=4\,h(x^2).\tag{4.1}$$

Подобно $h(x)$, функция $s(x)$ из (4.1) является неотрицательной неубывающей функцией на интервале $[0,+\infty)$. С помощью $s(x)$ определим функцию

$$S(x)=\int\limits_0^x\frac{s(t)}{t}\,dt=\int\limits_0^x\frac{4\,h(t^2)}{t}\,dt.\tag{4.2}$$

Преобразование (4.2) основано на утверждении 5.1 из работы [8], которое было использовано в работе [3]. Полученная в результате такого преобразования функция $S(x)$ будет неотрицательной, неубывающей и одновременно выпуклой относительно логарифма функцией.

Обозначим $x_1=\sqrt{x_0}=\sqrt[8]{3/5}$. После этого подставим функцию (3.7) в формулу (4.2). В результате прямых вычислений получим

$$S(x)=\begin{cases}6\,x^4\,(1-\varepsilon\,v(x)) & \text{при}\ \ 0\leqslant x<x_1,\\ \qquad 6\,x^4 & \text{при}\ \ x\geqslant x_1.\end{cases}\tag{4.3}$$

Здесь $v(x)$ — некоторый конкретный полином восьмой степени. Полином $v(x)$ в формуле (4.3) выражается через другой полином восьмой степени $V(\theta)$ при помощи линейной замены переменной:

$$v(x)=V(\theta),\ \ \text{где}\ \ \theta=\frac{x}{x_1}.\tag{4.4}$$

А полином $V(\theta)$ в (4.4) уже определяется явной формулой:

$$V(\theta)=\frac{(7\,\theta^2-3)\,(\theta^2-1)^3}{3}. \tag{4.5}$$

Согласно результатам работы [3] при переходе от гипотезы 1.1 к гипотезе 1.2 параметр n не меняется, а параметр λ заменяется параметром $\alpha=\lambda/2$. По этой причине можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.1. *Для каждого конкретного значения параметра ε, удовлетворяющего неравенствам $0<\varepsilon\leqslant 1$, функция $S(x)$, определяемая формулами* (4.3), (4.4) *и* (4.5)*, является контрпримером к гипотезе Хабибуллина 1.1 для случая $n=2$ и $\lambda=4$.*

Теорема 4.1 доказывается прямыми вычислениями. Функция $S(x)$, упоминаемая в этой теореме, — это контрпример Шарипова, пересчитанный со уже со случая гипотезы 1.2 на случай гипотезы 1.1.

Список литературы

[1] Б. Н. Хабибуллин, *Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка* // Мат. Сборник. Т. 190, вып 2 1999. С. 145-157.

[2] Б. Н. Хабибуллин, *The representation of a meromorphic function as a quotient of entire functions and the Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results*, // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). Т. 9, №2. 2002. С. 146-167; см. также e-print **math.CV/0502433** в электронном архиве http://arXiv.org.

[3] B. N. Khabibullin, *A conjecture on some estimates for integrals*, e-print **arXiv:1005.3913** в электронном архиве http://arXiv.org.

[4] R. A. Baladai, B. N. Khabibullin, *Three equivalent conjectures on an estimate of integrals*, e-print **arXiv:1006.5140** в электронном архиве http://arXiv.org.

[5] R. A. Sharipov, *A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.0376** в электронном архиве http://arXiv.org.

[6] R. A. Sharipov, *Direct and inverse conversion formulas associated with Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.1572** в электронном архиве http://arXiv.org.

[7] R. A. Sharipov, *A counterexample to Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.2738** в электронном архиве http://arXiv.org.

[8] А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, издательство «Вища школа», Львов, 1988.

Рустам Алексеевич Баладай,
ул. Дорожная 7, село Бураево,
Республика Башкортостан,
452960, Россия
E-mail address: baladaichik@mail.ru